

مفاهیم کلی نقشه برداری

www.hamyarnb.com

۱- موضوع نقشه برداری

به طور کلی نقشه برداری را می‌توان علم تهیه و پیاده کردن نقشه دانست. ولی به دلیل گستردگی زیاد این علم در دنیا تعریف بالا را نمی‌توان جامع دانست. کنترل کارهای اجرایی و تعیین میزان نشست ساختمانها در عملیات ساختمانی و موتاز واحدهای تولیدی و صنعتی - طرحهای مربوط به تسطیح اراضی در شهرسازی و کشاورزی - کنترل دائمی انحراف سدها از نظر فشار آب در تأسیسات آبی - انتقال نقاط و امتدادها در معادن و راههای زیرزمینی - بررسی تغییرات پوسته زمین در زمین شناسی - تعیین میزان عمق آب و تهیه نقشه‌های دریانوردی در کشتیرانی و بندرسازی - تهیه نقشه‌ایتیه و آثار تاریخی در باستانشناسی پیکره‌های دیگری از دامنه فعالیتهای نقشه برداری را تشکیل می‌دهد.

۲- نقشه برداری عام و نقشه برداری خاص

به غیر از ریاضی و فیزیک که مبنای مبحثهای مختلف نقشه برداری است رشته‌های دیگری از علوم و فنون هستند که به طور مستقیم در کار تهیه نقشه دخالت دارند، روی این اصل نقشه برداری را به دو مفهوم اصلی و جداگانه تعریف می‌کنند مفهوم عام و مفهوم خاص.

مفهوم عام آن عبارت از جمیع علوم و فنونی است که در چاپ و تهیه نقشه دخالت دارند که در برابر کلمه کارتوگرافی^۱ استفاده می‌شود.

مفهوم خاص نقشه برداری عبارت از یک سلسله اندازه‌گیریهای طولی (افقی و عمودی) و زاویه‌ای و انجام محاسباتی بر روی این اندازه‌گیریها و سرانجام ترسیم نتایج حاصله بر صفحه

شبکه باشد یا نباشد) توسط روشهای نجومی تعیین گردد.

پس از تشکیل شبکه ژئودزی درجه یک نقاط دیگری به فواصل تقریبی ۱۵ تا ۲۰ کیلومتر در داخل این شبکه انتخاب و زوایای آن را با دقت حدود ۳ ثانیه اندازه می‌گیرند و مانند شبکه اصلی موقعیت آنها را نسبت به هم و نسبت به نقاط درجه ۱ تعیین می‌کنند. این نقاط تشکیل شبکه ژئودزی درجه ۲ را می‌دهند.

به همین ترتیب نقاط ژئودزی درجه ۳ داخل شبکه ژئودزی درجه ۲ و به فواصل ۸ تا ۱۰ کیلومتر از یکدیگر انتخاب و علامتگذاری می‌شود و قوائی زوایا با دقتی در حدود ۵ ثانیه صورت می‌گیرد و بالاخره نقاط ژئودزی درجه چهارم در داخل شبکه اخیر و به فاصله ۳ تا ۵ کیلومتر انتخاب و زوایای مثلثهای حاصل را با دقتی در حدود ۱۰ ثانیه اندازه می‌گیرند پس از پایان کارهای ژئودزی درجه چهارم عملیات نقشه برداری شروع می‌شود. شکل (۱-۱) شبکه نقاط ژئودزی داخل ایران را نشان می‌دهد.

۱-۲-۳ فتوگرامتری^۱

عکسهای هوایی توسط دوربینهای مخصوصی که زیر بدنۀ هواپیما نصب است به صورت نوارهای متوالی از سطح زمین برداشته می‌شود. این عکسها با دستگاههای برجسته بین ۲ مورد بررسی و مشاهده دقیق قرار می‌گیرد و پس از ترمیم و اصلاح آنها، زیر دستگاههای تبدیل قرار می‌گیرد و توسط اپراتورهای مخصوص به نقشه تبدیل می‌شود.

۱-۲-۴ کارتوجرافی^۲

کارتوجرافی عبارت است از کارترسیم و انتخاب قطع نقشه و تهیۀ پاکنویس از روی نسخه اصلی (مینوت) نقشه.

۱-۲-۵ چاپ و تکثیر

پس از اینکار کلیه مراحل فوق انجام شد نقشه برای چاپ و تکثیر آماده می‌شود - این عمل نیز به کمک فنون عکاسی و چاپ صورت می‌پذیرد.

۱-۳ تعریف نقشه

نقشه عبارت از ترسیم تصویر افقی قسمتی از عوارض زمین (اعم از طبیعی یا مصنوعی) به نسبتی کوچکتر بر روی صفحۀ تصویر است.

۱-۴ تعریف مقیاس

نسبتی را که بین ابعاد روی نقشه و اندازه‌های نظری‌شان بر روی زمین وجود دارد مقیاس می‌گویند پس در حقیقت مقیاس عبارت است از فاصله تصویر دو نقطه بر روی نقشه معمولاً مقیاس را در نقشه‌ها به هر دو شکل عددی و ترسیمی نشان می‌دهند. مقیاس عددی بیشتر کسری و به شکل $\frac{1}{N \times 1000}$ نشان داده می‌شود که صورت آن یک و مخرجش عددی است که نشان می‌دهد اندازه‌های پیاده شده در نقشه چند مرتبه کوچک شده‌اند و این بیشتر برای این منظور است که به راحتی بتوان دریافت که هر میلیمتر روی نقشه معادل N متر بر روی زمین است، N معمولاً یکی از اعداد $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{10}$ و یا حاصل ضرب این اعداد در $\frac{1}{100}$ یا $\frac{1}{1000}$ است.

مثال ۱-۱ مقیاس نقشه‌ای $\frac{1}{2500}$ است. اگر فاصله بین دو نقطه A و B روی این نقشه ۴۵ میلیمتر باشد فاصله دو نقطه را بر روی زمین تعیین کنید.

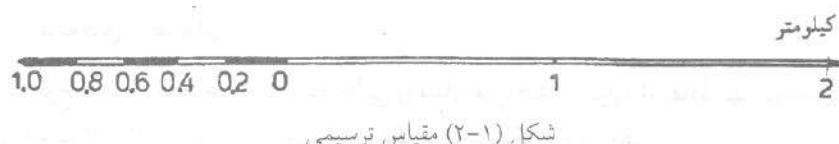
حل: چون مقیاس را می‌توان به شکل $\frac{1}{2/5 \times 1000}$ نوشت پس هر میلیمتر روی نقشه نشان دهنده $\frac{2}{5}$ متر بر روی زمین است و بنابراین فاصله زمینی بین این دو نقطه $(45 \times 2/5) = 112/5$ متر خواهد بود.

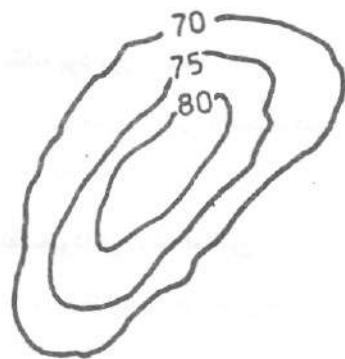
۱-۴-۱ مقیاس خطی یا ترسیمی

چون در اثر رطوبت و یا تغییر دما امکان تغییر ابعاد نقشه و اثر گذاردن بر روی اندازه‌های نقشه وجود دارد، معمولاً علاوه بر مقیاس عددی (که طبق تعریف فوق مشخص می‌شود) یک مقیاس خطی نیز در زیر نقشه رسم می‌کنند که در صورت تغییر ابعاد کاغذ اندازه‌های این مقیاس متناسب با آن تغییر کند و همواره اندازه‌گیری صحیح بر مبنای آن انجام شود.

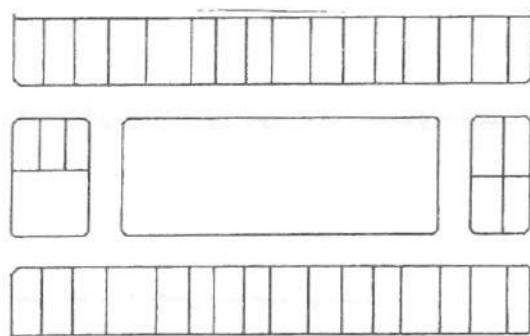
(مقیاس خطی یا ترسیمی عبارت است از پاره خطی که به فواصل متساوی تقسیم شده و هر تقسیم آن طول معینی از زمین را (که به عنوان واحد اختیار شده) نشان می‌دهد). این پاره خط از چپ به راست مدرج شده است و در قسمت چپ آن قبل از تقسیم صفر یک واحد را به ۱۰ جزو متساوی تقسیم و واحدهای کوچکتر بر روی نقشه را با استفاده از آن اندازه‌گیری می‌کنند. این قسمت را پاشنه مقیاس $\frac{1}{1}$ می‌گویند.

به کمک مقیاس خطی می‌توان اولاً طول زمینی را مستقیماً روی نقشه پیدا کرد و ثانیاً طولی که بر روی زمین اندازه‌گیری و تبدیل به افق شده است را بر روی نقشه منتقل کرد. این عمل با





شکل (۳-۱ ب) نقشه توپوگرافی



شکل (۳-۱ الف) نقشه مسطحاتی

ب - نقشه‌های توپوگرافی

در این نوع نقشه‌ها علاوه بر نشان دادن وضعیت مسطحاتی زمین وضعیت ارتفاعی آن نیز توسط خطوط تراز یا منحنیهای میزان مشخص می‌گردد. خطوط تراز مقطع سطح خارجی زمین با صفحات افقی متوازی و متساوی الفاصله است، بنابراین هر خط تراز مکان نقاط هم ارتفاع است، شکل (۳-۱ ب).

۶- شاخه‌های نقشه‌برداری

در مورد تقسیم‌بندی فن نقشه‌برداری به شاخه‌های مختلف نیز نظرات گوناگونی ارائه شده است. یکی از این نظرات تقسیم‌بندی آن به دو شاخه (مفهوم) عام و خاص است که شرح آن گذشت. مفهوم خاص نیز خود به شاخه‌های چندی به شرح زیر تقسیم می‌شود.

۱- نقشه‌برداری مسطحاتی یا پلانیمتری^۱

در این رشته برای تهیه نقشه‌های مسطحاتی بحث و گفتگو می‌شود.

۲- نقشه‌برداری توپوگرافی^۲

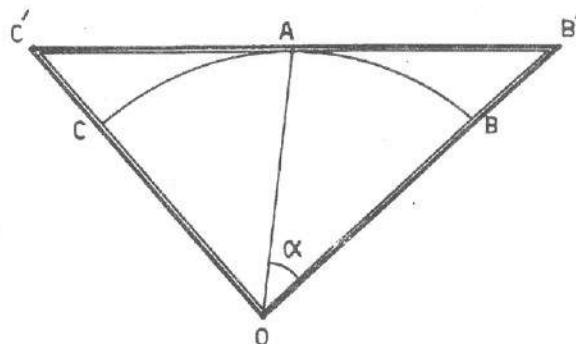
منتصود از آن تهیه نقشه‌های توپوگرافی است.

۳- نقشه‌برداری ساختمانی^۳

مراد از این شاخه بحث و بررسی درباره نحوه پیاده کردن محور ساختمانها و تأسیسات

1 - Planimetric Surveying 2 - Topographic Surveying

3 - Construction Surveying



شکل (۴-۱)

این مورد نخواهیم داشت.

اما اینکه اصولاً تا چه محدوده‌ای می‌توان زمین را مسطح فرض کرد و از قواعد هندسه مسطحه و مثلثات مسطحه استفاده کرد بستگی به مقیاس نقشه دارد. در عمل هنگامی که اختلاف بین طول قوس و مماس بر آن یعنی خطای ناشی از مسطح فرض کردن زمین پس از تبدیل به مقیاس از دقت ترسیمی یعنی $1/10$ میلیمتر کوچکتر باشد می‌توان زمین را مسطح فرض کرد و اصول و قواعد نقشه‌برداری مستوی را در مورد آن اجرا کرد.

برای محاسبه این اختلاف، زمین را به شکل کره و شعاع متوسط آن را R فرض می‌کنیم،

شکل (۴-۱).

$$l = \widehat{AB} = R \cdot \alpha$$

$$t = \overline{AB}' = R \cdot \tan \alpha \quad \tan \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{15} + \dots$$

$$e = t - l = R (\tan \alpha - \alpha) \cong R \frac{\alpha^3}{3} = \frac{R}{3} \left(\frac{1}{R} \right)^3 = \frac{l^3}{3R^3} \quad (1-1)$$

در صورتی که این تفاضل بعد از تبدیل به مقیاس از $1/10$ میلیمتر (که خطای ترسیمی فرض می‌شود) کوچکتر باشد می‌توان از انحنای زمین صرف نظر و اصول و قواعد نقشه‌برداری مستوی را در محدوده‌ای که حداقل طول آن ۱ باشد اجرا کرد.

مثال ۲-۱ برای تهیه نقشه‌ای به مقیاس $\frac{1}{10000}$ معین کنید حداقل طول منطقه‌ای را که در آن می‌توان از انحنای زمین صرف نظر کرد. شعاع متوسط زمین $R = 6,400,000 \text{ m}$ در نظر گرفته می‌شود.

$$\frac{l^3}{3R^3} \times \frac{1}{10000} \leq 1/10000$$

$$l^3 \leq 3 \times (6,400,000)^2 = 1/2288 \times 10^{14}$$

$$l \leq 49715 \cong 50000 \text{ m} = 50 \text{ km.}$$



سطح مقایسه^۱

۱-۲ شکل زمین

از آنجاکه زمین موضوع اصلی نقشه‌برداری است شناخت آن از نظر هندسی برای ما در درجهٔ اول اهمیت قرار دارد. لذا در این مرحله به مطالعهٔ شکل هندسی آن می‌پردازیم. زمین به علت دارابودن پستی و بلندیهای فراوان فاقد شکل هندسی منظمی است، با وجود این اگر این سؤال مطرح شود که زمین به کدام یک از احجام هندسی بیشتر از بقیه نزدیک است باید گفت به یک بیضوی دورانی شبیه است، حجمی که از دوران یک نیم بیضی حول محور کوتاهش حاصل می‌شود یعنی حجمی به معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1-2)$$

که در آن a و b به ترتیب نصف قطر بزرگ و نصف قطر کوچک بیضی است. این نظریه براساس اصل نیوتن و با توجه به حرکت دورانی زمین است که:
اگر تودهٔ سیالی که تحت تأثیر قوای جاذبه است حول محوری که از مرکز ثقلش می‌گذرد دوران دائمی داشته باشد شکلی که اختیار می‌کند یک بیضوی دورانی است. سطح این سیال دوار در هر یک از نقاطش بر امتداد برایند نیروهای واردہ بر آن نقطه عمود است.

۲-۲ بیضوی مقایسه^۲

برای آنکه بتوانیم نتایج حاصل از اندازه‌گیریهای زمینی را روی یک شکل هندسی پیاده کنیم و

۳-۳ سطح مبنای ارتفاعات (ژئوئید)

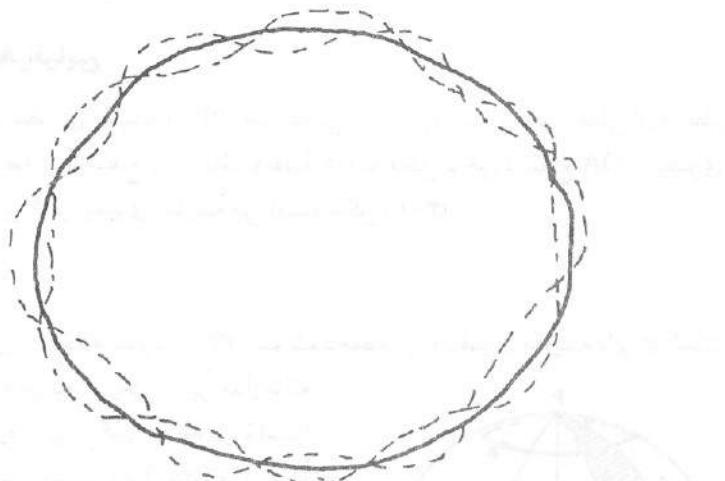
اگر سطح آب آزاد اقیانوسها و دریاهای آزاد را در حالت آرام و بدون اثرات امواج و جزر و مدها در نظر بگیریم و آن را در عالم تصور در زیر قاره‌ها ادامه بدھیم شکلی حاصل می‌شود که باز شبیه بیضوی بوده و به شکل واقعی زمین بسیار نزدیک است. این سطح را ژئوئید یا سطح تراز مینا می‌نامند.

برخلاف بیضوی مقایسه که شکل و تعریف هندسی دارد، ژئوئید یک شکل هندسی کامل نیست و فقط تعریف فیزیکی دارد به همین دلیل این دو شکل بر هم منطبق نیستند. همچنین قائم بر بیضوی مقایسه و قائم بر ژئوئید (که همان امتداد شاغولی باشد) بر یکدیگر منطبق نیستند. این دو خط با هم زاویه کوچکی می‌سازند که آن را انحراف نسبی قائم می‌نامند. مقدار این زاویه حد اکثر به چندین ثانیه می‌رسد.

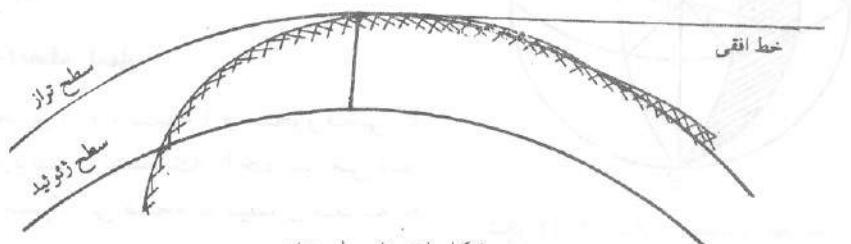
بیضوی مقایسه

شکل فیزیکی زمین

ژئوئید



شکل (۱-۲) زمین، بیضوی مقایسه و ژئوئید



شکل (۲-۲) سطح تراز

بیضی است که به آن نصفالنهار (یا نیمروز) گفته می‌شود یکی از این نصفالنهارات که صفحه آن از رصدخانهٔ گرینویچ انگلستان می‌گذرد به عنوان نصفالنهار مبدأ^۱ برگزیده شده است. این نصفالنهار، بیضوی را به دو نیمکرهٔ شرقی و غربی تقسیم می‌کند.

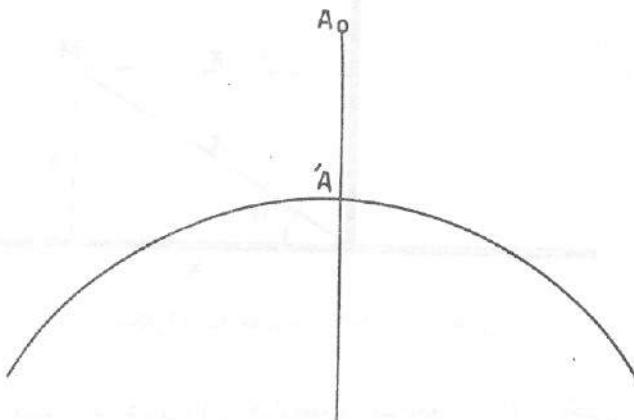
۴-۳-۲ عرض جغرافیایی^۲

اگر از نقطهٔ b قائم بر بیضوی را رسم کنیم زاویهٔ بین این خط و صفحهٔ استوا را عرض جغرافیایی نقطهٔ b می‌گویند. چنانکه برای سطح مقایسهٔ به جای بیضوی کره در نظر بگیریم می‌توانیم عرض جغرافیایی را به نحو دیگری تعریف کنیم: قوسی از نصفالنهار که بین این نقطهٔ و صفحهٔ استوا قرار دارد.

عرض جغرافیایی از صفر تا ۹۰ درجه تغییر می‌کند و بر حسب آنکه نقطه در شمال استوا باشد یا در جنوب آن عرض شمالی یا عرض جنوبی گفته می‌شود. عرض جغرافیایی را با ϕ نشان می‌دهند.

۴-۴-۲ طول جغرافیایی^۳

قوسی از دایرهٔ استوا را که بین نصفالنهار m و نصفالنهار G (نصفالنهار مبدأ) واقع است



شکل (۴-۲)، ارتفاع یک نقطه

طول جغرافیایی می‌گویند. به بیان دیگر طول جغرافیایی نقطهٔ m عبارت از زاویهٔ دو وجهی بین دو صفحهٔ نصفالنهار m و نصفالنهار G است. طول جغرافیایی از صفر تا ۱۸۰ درجه تغییر می‌کند و بر حسب آنکه نقطه در مشرق نصفالنهار مبدأ باشد یا در مغرب آن طول را شرقی یا غربی می‌گویند. طول جغرافیایی را با λ نشان می‌دهند. λ و φ را مختصات جغرافیایی یا مختصات کروی می‌نامند.

مشخص می‌شود.

اما در نقشه برداری ژئودتیک که منطقه وسیع است نمی‌توان سطوح تصویر را مسطح فرض کرد، در این حال برای مشخص کردن نقاط در صفحه تصویر باید بین مختصات جغرافیایی نقطه (λ و ϕ) از یک طرف و مختصاتش در صفحه تصویر (x و y) یا (r و θ) از طرف دیگر رابطه‌ای به صورت

$$x = f(\lambda \text{ و } \phi) \quad (2-2)$$

$$y = g(\lambda \text{ و } \phi) \quad (3-2)$$

یا

$$r = f(\lambda \text{ و } \phi) \quad (4-2)$$

$$\phi = g(\lambda \text{ و } \phi) \quad (5-2)$$

برقرار کنیم به نحوی که با داشتن مختصات هر نقطه روی بیضوی بتوانیم یک نقطه روی برگه تصویر مشخص کنیم و بر عکس با معلوم بودن مختصات هر نقطه در برگه تصویر مختصات جغرافیایی آن را محاسبه کنیم.

مجموعه روابط ریاضی که بین مختصات جغرافیایی یک نقطه و مختصات قائم الزاویه آن وجود دارد اساس مبحث خاصی را در ژئودزی تحت عنوان (سیستمهای تصویر) تشکیل می‌دهد.

به دلیل آنکه بیضوی یا کره سطح قابل گسترشی مثل مخروط یا استوانه نیست که بتوانیم آن را بدون ایجاد پارگی باز کنیم و کاملاً بر صفحه تصویر منطبقش سازیم از حجمهای هندسی قابل گسترش به عنوان واسطه کمک می‌گیریم، به این ترتیب که نقاط روی بیضوی را بروی این حجمهای هندسی تصویر کرده و سپس این حجمها را گسترش داده و روی صفحه تصویر منطبق می‌کنیم.

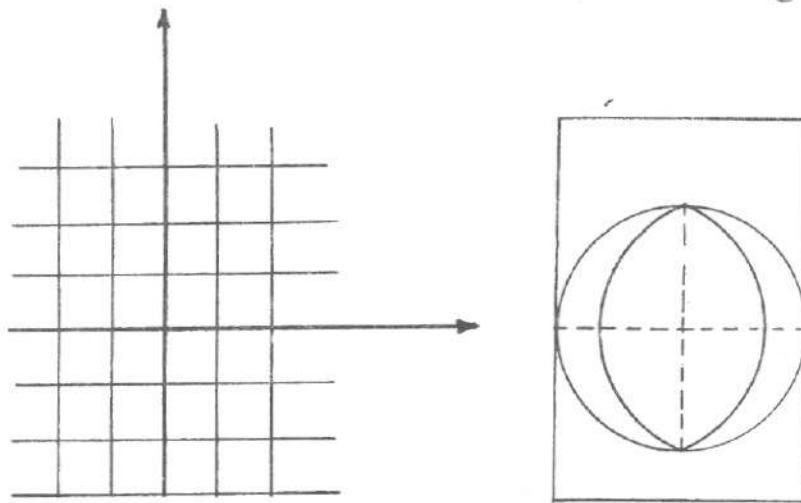
سیستمهای تصویر معمولاً به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که او لاً زاویه‌ها را تغییر ندهند و ثانیاً مقیاس تبدیل را در یک منطقه ثابت نگهادارند، در چنین حالتی تصویر هر عارضه با شکل اصلی آن بر روی زمین مشابه است. این نوع سیستم تصویر را مشابه^۱ می‌نامند در اینجا به طور خلاصه چند نمونه از سیستمهای تصویر مشابه را بررسی می‌کنیم.

۱-۴-۳-۱ سیستم تصویر لامبرت^۲

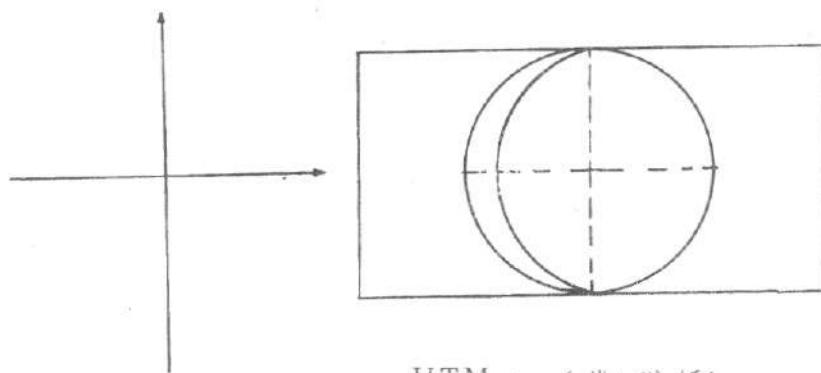
در این سیستم یک مخروط در طول مدار معینی (که معمولاً مدار مرکزی منطقه است) بر بیضوی مماس می‌شود. نقاط روی بیضوی در امتداد قائم آنها بر روی این مخروط تصویر می‌شوند.

سپس مخروط در امتداد یکی از بالهایش شکافته و بر روی صفحه تصویر گسترده می‌شود.

در این سیستم تصویر نصف‌النهارها خط مستقیم و تصویر مدارها دایره‌های متحدم‌المرکزی هستند که مراکز آنها روی رأس مخروط است. محل برخورد نصف‌النهار مرکزی منطقه و مدار مرکزی منطقه را مبدأً مختصات اختیار می‌کنند. هر چه از مدار مرکزی منطقه دور شویم مقیاس



شکل (۷-۲ ب) تصویر مدارات و نصف‌النهارات در سیستم مرکاتور



شکل (۸-۲ ب) مدار و نصف‌النهار مرکزی

می‌کنند و برای آنکه مختصات منفی وجود نداشته باشد مختصات این نقطه را به جای صفر و صفر به ترتیب $500,000$ و $10,000,000$ انتخاب کرده‌اند بنابراین x و y هر نقطه در شرق نصف‌النهار مرکزی و شمال استوا به این اعداد اضافه می‌شوند و x و y نقاط واقع در غرب این نصف‌النهار و جنوب استوا از این اعداد کسر می‌شوند، شکل (۸-۲).



نظریه خطاهای

۱- مقدمه

همان طوری که ذکر شد مفهوم خاص نقشه برداری عبارت از یک سلسله اندازه گیریهای زمینی و انجام محاسباتی روی این اندازه گیریها و بالاخره ترسیم نتایج حاصله بر صفحه تصویر (نقشه) است.

به طور کلی در نقشه برداری با سه نوع اندازه گیری سرو کار پیدا می کنیم که عبارت اند از:

- ۱- اندازه گیری طول (طولیابی)
- ۲- اندازه گیری ارتفاع (ترازیابی)
- ۳- اندازه گیری زاویه (زاویه یابی).

اما چون لازم است قبل از انجام محاسبه و نیز قبل از عملیات ترسیم از صحت اندازه گیریها و درجه اطمینان به آنها مطلع باشیم قبل از بحث درباره روش‌های اندازه گیری به بررسی کلی خطاهای اندازه گیری می پردازیم تا اولاً در هر عمل اندازه گیری به دقت مطلوب در عملیات دستیابی حاصل کنیم و ثانیاً از به کار بردن وسایل گرانقیمت و صرف وقت و هزینه بیمورد جلوگیری کنیم و به طور خلاصه روش‌هایی را در عمل به کار ببریم که با حداقل کار و هزینه به دقتش دست یابیم که برای آن اندازه گیری خاص نیاز است.

۲- عوامل خطأ

اصولاً تمام اندازه گیریها برای تعیین اندازه واقعی یک کمیت انجام می‌گیرد. این اندازه گیری مطمئناً با مقدار واقعی آن اندکی اختلاف دارد. منابع عمدۀ این اختلاف عبارت اند از:

روی نتایج اندازه‌گیریها از قواعد آمار و احتمالات و مخصوصاً از قانون توزیع نرمال استفاده می‌شود. چون تعیین این نوع خطاهای مخصوصاً از نظر علامت و مقدار امکانپذیر نیست تعیین مقدار واقعی یک کمیت برای ما غیرممکن است. چون در اندازه‌گیریها یک کمیت، خطاهای گاهی با علامت مثبت و گاهی با علامت منفی ظاهر می‌شوند در جمع نهایی تا اندازه‌ای یکدیگر را خشنی می‌کنند. به این دلیل تنها شیوه‌ای که برای مقابله با این نوع خطاهای به نظر می‌رسد تکرار اندازه‌گیری به دفعات و انتخاب نزدیکترین عدد به مقدار واقعی است. به طور کلی هدف از این بحث حل سه مسئله زیر است:

۱- تعیین عددی مثل L که مناسب‌ترین مقدار برای کمیت مورد نظر (یعنی نزدیکترین عدد به مقدار واقعی کمیت) است.

۲- تعیین عددی که مشخص کننده معیار دقت اندازه‌گیریهاست.

۳- تعیین عددی که بیانگر میزان نزدیکی L به مقدار واقعی کمیت است. (میزان درجه اعتماد به آن)

وقتی عمل اندازه‌گیری را به دفعات زیاد تکرار کنیم و معلمئن باشیم که هیچ نوع خطای سیستماتیک در اندازه‌ها موجود نیست، از مقایسه اندازه‌های مختلف نتایج زیر را به عنوان اصل در نظریه خطاهای تصادفی قبول می‌کنیم.

۱-۵-۱ اصول کلی

۱- در مقابل هر خطای مثبت یک خطای منفی وجود دارد که قدر مطلقاتان با هم برابرند.

۲- خطاهای کوچک به دفعات بیشتری اتفاق می‌افتد.

۳- بزرگی خطاهای از یک حد معینی تجاوز نمی‌کند.

۱-۵-۲ تعاریف

فرض می‌کنیم نتایج حاصل از اندازه‌گیری یک کمیت (مثلاً یک فاصله) که با یک وسیله دقیق اندازه‌گیری شده به ترتیب a_1 و a_2 و ... و a_n باشد در این صورت مقدار \bar{a} را که از رابطه:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{\sum a_i}{n} \quad (1-3)$$

حاصل می‌شود میانگین حسابی این اندازه‌گیریها می‌نامند و آن گونه که خواهیم دید به عنوان مناسب‌ترین مقدار برای کمیت (جواب مسئله ۱) قبول می‌کنند. اگر مقدار حقیقی کمیت را a و تفاضل آن را با میانگین، «بنامیم و نیز تفاضل a را با هر یک از مقادیر \bar{a} و a_i به ترتیب v_i و e_i فرض کنیم خواهیم داشت.

$$\alpha = \bar{a} - a \quad (2-3)$$

$$\sum_{\text{ا}}^n e_i = \sum_{\text{ا}}^n V_i + n \alpha = n \alpha$$

$$(\sum_{\text{ا}}^n e_i)^2 = n^2 \alpha^2$$

$$\sum_{\text{ا}}^n e_i^2 + 2 \sum_{\text{ا}}^n e_i e_j = n^2 \alpha^2$$

چون e_i و e_j اها به شکل اعداد جبری وارد می‌شوند مقدار $e_i e_j$ جزئی و قابل چشمپوشی است.

$$\sum_{\text{ا}}^n e_i^2 = n^2 \alpha^2$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{n} \sum_{\text{ا}}^n e_i^2 = \frac{1}{n} \frac{\sum e_i^2}{n} = \frac{1}{n} \delta^2$$

$$\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{n}} \quad (10-3)$$

با تساوی طرفهای دوم روابطی که α را تعیین می‌کند خواهیم داشت

$$\delta^2 - \frac{\sum V_i^2}{n} = \frac{1}{n} \delta^2$$

$$\delta^2 (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \sum V_i^2$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum V_i^2}{n-1}} \quad (11-3)$$

با استفاده از روابط فوق و معلوم بودن خطاهای ظاهری V_i می‌توان مقدار خطای معیار را محاسبه نمود. همچنین از روابط فوق نتیجه می‌گیریم که:

اولاً وقتی یک کمیت با میانگین‌گیری n بار اندازه‌گیری آن کمیت به دست آید خطای میانگین به قدر \sqrt{n} مرتبه از خطای هر یک، از اندازه‌گیریها کوچکتر است یعنی با تکرار اندازه‌گیری خطای عملیاتی به نسبت \sqrt{n} مرتبه کاهش می‌یابد.

ثانیاً وقتی که تعداد اندازه‌گیریها را بسیار زیاد می‌کنیم (یعنی وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند) مقدار خطای میانگین به سمت صفر میل خواهد کرد و در این صورت میانگین اندازه‌گیریها به مقدار واقعی کمیت نزدیک می‌شود.

برای محاسبه خطای معیار به کمک ماشین حساب می‌توان آن را از رابطه‌ای که مستقیماً از روی مقادیر اندازه‌گیری شده کمیت حاصل می‌شود محاسبه کرد:

۸-۳ منحنی نمایش خطاهای (منحنی گوس)

نحوه توزیع خطاهای تصادفی را می‌توان به وسیله یک فرمول و یا یک منحنی تعیین کرد که آن را تابع توزیع خطا و یا منحنی توزیع نرمال می‌گویند.

فرض می‌کنیم V_1 و V_2 و ... و V_n به ترتیب خطاهای ظاهری به دست آمده از n مرتبه اندازه‌گیری یک کمیت و a میانگین حسابی این اندازه‌گیریها باشد. هر یک از مقادیر V_1 و V_2 و ... و V_n را با توجه به مقدار جبری آنها به طور صعودی مرتب و فرض می‌کنیم:

n_1 تعداد اندازه‌هایی است که مقدار خطای ظاهری آنها بین صفر و ۱ واحد است.

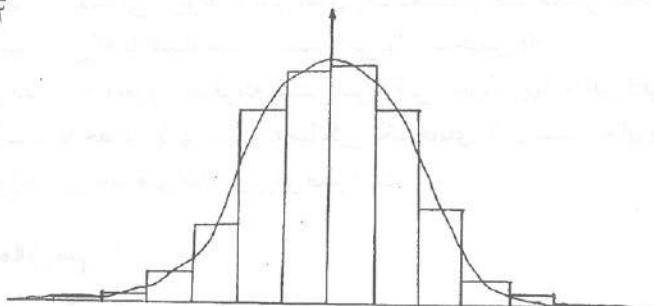
n_2 تعداد اندازه‌هایی است که مقدار خطای ظاهری آنها بین ۱ و ۲ واحد است.

و به همین ترتیب تا آخر و این فرض را برای اندازه‌هایی که مقدار خطای ظاهری آنها منفی است نیز انجام می‌دهیم. روی محور x مقادیر خطای ظاهری و روی محور y شماره وقوع هر یک از این خطاهای (فرکانس آنها) را وارد می‌کنیم. روی هر کدام یک مستطیل بنا می‌کنیم به نحوی که ضلع کوچکش واحد خطای ظاهری و ضلع بزرگ آن عدد وقوع خطای ظاهری هر یک از فواصل مربوط (n_1 و n_2 و ...) باشد، با اتصال مرکز هر یک از قاعده‌های بالای مستطیلها به یکدیگر خط شکسته‌ای حاصل می‌شود که نحوه توزیع خطاهای را بین اندازه‌های مختلف نشان می‌دهد. هرگاه تعداد این اندازه‌گیریها بسیار زیاد باشد خط شکسته تبدیل به منحنی می‌شود. تجربه نشان داده است که شکل این منحنی در شرایط معمولی به شکل منحنی توزیع نرمال (یا منحنی گوس^۲) است، شکل (۱-۳). صورت کلی معادله آن چنین است.

$$y = k e^{-\frac{x^2}{2}}$$

در این معادله y نسبت درصد وقوع خطای x مقدار خطای e پایه لگاریتم طبیعی و k ضرایب ثابتی است که نشان دهنده دقت اندازه‌گیری است و مقادیر آنها چنین است.

$$h = \frac{1}{\delta \sqrt{2}} \quad (14-3)$$



شکل (۱-۳) منحنی گوس

به طوری که ذکر شد اندازه این خطای حدوداً ۷/۲ برابر خطای متوسط هندسی (۵) است ولی در محاسبات معمولاً ۵/۲ برابر خطای معیار را به عنوان خطای ماکزیمم در نظر می‌گیرند. از تعریف خطاهای احتمالی - ماکزیمم و معیار می‌توان نتیجه گرفت که روابط زیر بین این خطاهای برقرار است.

$$e_p = \frac{1}{4} e_{Max} \cong \frac{2}{3} \delta \quad (16-3)$$

مثال ۲-۳ مطلوب است محاسبه خطاهای معیار، ماکزیمم و متوسط حسابی برای طولی که ده مرتبه اندازه گیری شده و نتایج حاصل از آن به شرح زیر است - ضمناً اندازه هایی که باید از فهرست اندازه گیریها حذف شوند را نیز مشخص کنید.

$$l_1 = 251/45 \quad l_2 = 251/46 \quad l_3 = 251/47 \quad l_4 = 251/44 \quad l_5 = 251/44$$

$$l_6 = 251/51 \quad l_7 = 251/48 \quad l_8 = 251/44 \quad l_9 = 251/48 \quad l_{10} = 251/49$$

$$\bar{l} = \frac{\sum l_i}{n} = 251/46.6 \quad \text{میانگین اندازه ها}$$

$$V_1 = -0/016$$

$$V_2 = -0/006$$

$$V_3 = +0/004$$

$$V_4 = -0/026$$

$$V_5 = -0/026$$

$$V_6 = +0/044$$

$$V_7 = +0/014$$

$$V_8 = -0/026$$

$$V_9 = +0/014$$

$$V_{10} = +0/024$$

خطای معیار

$$\delta = \sqrt{\frac{+0/00524}{9}} = +0/024$$

$$e_{Max} = 2/5 \delta = 2/5 \times +0/024 = +0/048 \quad \text{خطای ماکزیمم}$$

$$e_a = \frac{\sum |V_i|}{10} = \frac{+0/2}{10} = +0/02 \quad \text{خطای متوسط حسابی}$$

چون خطای ظاهری هر کدام از اندازه ها از خطای ماکزیمم کمتر است می‌توان گفت که همه اندازه گیری های فوق قابل قبول است.

۱۰-۱ محاسبه خطای معیار در اندازه گیری های غیر مستقیم.

۱۰-۱-۱ حالت کلی

فرض می‌کنیم کمیتی مثل A از طریق اندازه گیری از چند کمیت دیگر که مقادیرشان x و y و z است با رابطه ای به صورت

$$A = F(x, y, z) \quad (17-3)$$

به دست آمده باشد (این رابطه را معادله اندازه گیری می‌نامند).

(δ_x و δ_y و δ_z به ترتیب خطای معیار کمیتهای X و Y و Z است). در این صورت

$$\delta_A = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \delta_x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \delta_y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \delta_z\right)^2} \quad (22-3)$$

۳-۱-۲- حالت‌های خاص

۱- خطای مجموع:

هر گاه کمیت S از مجموعه چند کمیت X و y و Z و ... حاصل شده باشد یعنی داشته باشیم.

$$s = x + y + z$$

طبق فرمول (۲۲-۳)، خطای معیار S به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\delta_s = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2} \quad (23-3)$$

در حالتی که $\delta_x = \delta_y = \delta_z = \delta$ خطای مجموع عبارت است از:

$$\delta_s = \delta \sqrt{n} \quad (24-3)$$

که در آن ۱۱ عدد کمیتهای اندازه‌گیری شده و ۵ خطای معیار مشترک آنها است.

مثال ۳-۳ مطلوب است محاسبه خطای اندازه گیری یک مسافت ۴۵۰ متری که با یک نوار فلزی ۵ متری اندازه گیری شده باشد در صورتی که خطای متوسط هر دهانه ۲ میلیمتر فرض شود.

حل:

$$450 \div 50 = 9 \quad \text{تعداد دهانه‌ها} \quad \delta = 2 \times \sqrt{9} = 6 \text{ mm}$$

یادآوری: اگر این خطای سیستماتیک باشد یعنی طول حقیقی نوار از طول اسمی آن ۲ میلیمتر کمتر یا زیادتر باشد اثر این خطای در کل مسافت اندازه‌گیری به مقدار

$$n \times e = 9 \times 2 = 18 \text{ mm}$$

ظاهر خواهد شد. در این مورد اگر طول حقیقی نوار بیشتر از طول اسمی آن باشد عدد حاصل به مسافت اندازه گیری اضافه می شود و اگر طول حقیقی کمتر از طول اسمی باشد مقدار مذکور از فاصله به دست آمده کم می شود.

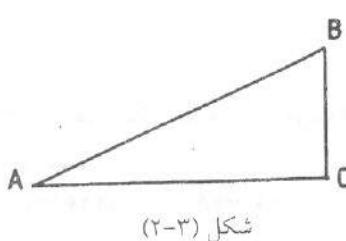
به طور کلی می‌توان گفت اجتماع خطاها سیستماتیک به صورت $e \times n$ در نتیجه کل ظاهر می‌شود در حالی که جمع خطاها تصادفی $e \sqrt{n}$ است.

۲- خطای تفاضل

فرض می کنیم

$$D = x - y$$

در این صورت یا توجه به فمول (۳-۲۲)



شکل (۲-۳)

مثال ۶-۳ فاصله افقی و اختلاف ارتفاع بین دو نقطه A و B به ترتیب ۱۵۰ متر و ۱۲ متر است هر گاه خطای معیار فاصله افقی ۲۰ سانتیمتر و خطای معیار اختلاف ارتفاع ۵ سانتیمتر فرض شود خطای شیب AB چقدر است، شکل (۲-۳).

حل: شیب خط AB، خارج قسمت اختلاف ارتفاع بین نقاط ابتدا و انتهای بر فاصله افقی آن است، شکل (۲-۳).

$$G = \frac{y}{x} = \frac{12}{150} = 0.08 = 8\%$$

شیب خط

$$\delta G = G \times \sqrt{\left(\frac{0.05}{12}\right)^2 + \left(\frac{0.02}{150}\right)^2} = 0.000351 \approx 0.003$$

۱۱-۳ خطای مطلق و خطای نسبی

از نظر کلی خطای مطلق به تفاضل مقدار واقعی و مقدار اندازه‌گیری شده کمیت گفته می‌شود. این تعریف در مورد خطاهای تصادفی به خطای معیار و در مورد خطاهای تدریجی به قدر مطلق تفاضل اطلاق می‌شود. خارج قسمت خطای (تدریجی یا تصادفی) بر مقدار واقعی کمیت را خطای نسبی می‌نامند.

$$e_R = \frac{\delta L}{L} \quad (29-3)$$

خطای نسبی میزان دقت در عملیات اندازه‌گیری را معین می‌کند. در صورت معلوم بودن دقت نسبی (حداکثر خطای نسبی مجاز) حد خطای مجاز در عملیات مجاز می‌شود تا حدود به کاربردن وسایل نقشه برداری و نیز روش‌های اندازه‌گیری را معلوم کند تا اولاً به دقت مطلوب در عملیات برسیم و ثانیاً از به کار بردن وسایل گران‌قیمت و صرف وقت بی مورد جلوگیری کنیم.

دهانه‌های ۴ و ۵ و ۶ با پنج مرتبه قرائت ابتدا و انتهای نوار سایر دهانه‌ها با چهار مرتبه قرائت ابتدا و انتهای نوار در صورتی که خطای قرائت ابتدا و انتهای نوار در هر دهانه به ترتیب $1/0$ و $1/2$ میلیمتر باشد خطای اندازه‌گیری مسافت مذکور را تعیین کنید.

۷- برای تعیین مساحت چهارضلعی ABCD اندازه‌گیریهایی به شرح زیر انجام گرفته است.

$$AB = ۳۹۸/۵ \text{ m} \quad CD = ۱۸۶/۲ \text{ m} \quad \hat{B} = ۱۱۸^\circ \text{ و } ۳۰'$$

$$BC = ۴۷۷/۲ \text{ m} \quad DA = ۶۱۷/۷ \text{ m} \quad \hat{D} = ۱۳۰^\circ \text{ و } ۵۵'$$

اگر خطای اندازه‌گیری فاصله 10 cm \pm و خطای اندازه‌گیری زاویه یک دقیقه فرض شود خطای اندازه‌گیری مساحت چهارضلعی چقدر است.

۸- اضلاع مجاور به زاویه قائمه یک مثلث قائم الزاویه به ترتیب برابر است با

$$AB = ۶۴/۵۰ \text{ m} \pm ۰/۰۵ \text{ m}$$

$$AC = ۱۲۳/۴۰ \text{ m} \pm ۰/۱۰ \text{ m}$$

خطای اندازه‌گیری زاویه C را تعیین کنید.

